2. Data la funzione $f(x) = \sqrt{3x-2} + \frac{x}{2}$ per quale valore di x_0 la retta tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$ è parallela alla retta $y = x$? -> coeff. ang = 1

a) $x_0 = 2$ b) $x_0 = 1$ c) $x_0 = \frac{4}{3}$ d) $x_0 = \frac{11}{3}$

$$f'(x) = 1$$

$$(3x-2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(3x-2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 + \frac{1}{2}$$

$$\left(\sqrt{3x-2}\right)' + \left(\frac{x}{2}\right)' = 1$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3x-2}} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{3}{\sqrt{3x-2}} + 1 = 2 \to \frac{3}{\sqrt{3x-2}} = 1 \to 3 = \sqrt{3x-2}$$

$$9 = 3x-2$$

$$3x - 2 = 9$$

$$3x = 11$$

$$x = \frac{11}{3}$$

3. Indicare il valore dell'integrale $\int_0^2 x^2 \sin(\pi x)\, dx$:

a) -4, b) 0 c) $-\frac{4}{\pi}$, d) $-\frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi^3}$.

x parti 2 volte

$$\int \operatorname{sen}(\pi x) \qquad \frac{1}{\pi}\int \pi \operatorname{sen}(\pi x) \qquad -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)$$

$$\int \underset{f(x)}{x^2} \underset{g'(x)}{\operatorname{sen}(\pi x)}\, dx = -\frac{x^2}{\pi} \cdot \cos(\pi x) + \int \underset{f(x)}{\frac{2x}{\pi}} \cdot \underset{g'(x)}{\cos(\pi x)}\, dx =$$

$$= -\frac{x^2}{\pi} \cdot \cos(\pi x) + \frac{2x}{\pi} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{sen}(\pi x) - \int \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{sen}(\pi x)\, dx$$

$$= -\frac{x^2}{\pi} \cdot \cos(\pi x) + \frac{2x}{\pi^2} \cdot \operatorname{sen}(\pi x) - \int \frac{2}{\pi^2} \cdot \operatorname{sen}(\pi x)\, dx$$

$$-\frac{2}{\pi^3}\int \pi \cdot \operatorname{sen}(\pi x)\, dx \to +\frac{2}{\pi^3} \cdot \cos(\pi x)$$

$$= \left(-\frac{x^2}{\pi} \cdot \cos(\pi x) + \frac{2x}{\pi^2} \cdot \operatorname{sen}(\pi x) + \frac{2}{\pi^3} \cdot \cos(\pi x)\right)\Bigg|_0^2$$

$$-\frac{4}{\pi} \cdot (\cos 2\pi) + \cancel{\frac{4}{\pi^2} \cdot \operatorname{sen}(2\pi)} + \cancel{\frac{2}{\pi^3} \cdot \cos(2\pi)} - \cancel{+\frac{2}{\pi^3} \cdot \cos(0)}$$

$$= -\frac{4}{\pi}$$

Regola der. Taylor

4. Qual è il valore della derivata ottava in 0 della funzione $f(x) = \frac{e^{x^2}}{7} - \frac{e^{-x^4}}{56}$?

a) $\frac{1}{8}$, b) $-\frac{1}{336}$, c) 600 d) -120.

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{7} - \frac{e^{-x^4}}{56}$$

Risposta d).

Per trovare il valore della derivata ottava in 0 si calcola lo sviluppo di Taylor di grado 8 centrato in 0. Moltiplicando per 8! il coefficiente di x^8 si trova la derivata richiesta.

Lo sviluppo di Taylor di grado 8 centrato in 0 di f si ottiene sottraendo i polinomi di Taylor dei due esponenziali.

Si parte dallo sviluppo di e^t centrato in 0:

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n)$.

Sostituendo x^2 e $-x^4$ a t si trova:

$f(x) = \frac{1}{7}(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + o(x^8)) - \frac{1}{56}(1 - x^4 + \frac{x^8}{2} + o(x^8))$.

A questo punto non occorre fare tutti i conti, ma, come già detto, basta calcolare il coefficiente di x^8 e moltiplicare per 8!:

$8!(\frac{1}{7\cdot4!} - \frac{1}{56\cdot2}) = -120$.

1. La regola aurea di Taylor

La formula generale dello sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ (detto anche sviluppo di Maclaurin) è un'identità precisa:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\mathbf{f^{(8)}(0)}}{\mathbf{8!}}\mathbf{x^8} + \ldots$$

Da questa formula deriva una legge fondamentale:

> **Il coefficiente che moltiplica x^n è sempre uguale alla derivata n-esima divisa per $n!$.**

Se cerchi la derivata ottava ($f^{(8)}(0)$), devi isolare il coefficiente di x^8 e moltiplicarlo per $8!$. Se tu guardassi un esponente più alto (es. x^{10}), staresti calcolando informazioni relative alla derivata decima, non all'ottava.

$$8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\left(\frac{1}{7\cdot4\cdot3\cdot2} - \frac{1}{7\cdot8\cdot2}\right) = 8!\left(\frac{8-4\cdot3}{7\cdot8\cdot4\cdot3\cdot2}\right) =$$

$$= \cancel{8}\cdot\cancel{7}\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\left(\frac{-4}{\cancel{7}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\right) = 6\cdot5\cdot(-4) = 30(-4) = -120$$

5. Quanti punti di massimo (sia relativi che assoluti) ha la funzione $f(x) = x^2 e^{-x^2}$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3.

$$f'(x) = (x^2)'\cdot e^{-x^2} + x^2\cdot(e^{-x^2})'$$
$$= 2x\cdot e^{-x^2} + x^2\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)$$
$$= 2x\cdot e^{-x^2} + x^2\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x) = 2x\left(e^{-x^2} - x^2 e^{-x^2}\right) =$$
$$= 2x\cdot e^{-x^2}(1-x^2)$$

$F_1 > 0$? $x > 0$

$F_2 > 0$? $1 - x^2 > 0$ → $-x^2 > -1$, $x^2 < 1$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$

-1 $+1$

$-1 < x < 1$

	-1	0	1	
f_1	$-$	$-$	$+$	$+$
f_2	$-$	$+$	$+$	$-$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

6. Quale tra le seguenti funzioni è la derivata di $\sqrt{\ln(\sqrt{x})}$?

a) $\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{\ln(\sqrt{x})}}$, b) $\frac{1}{4x\sqrt{\ln(\sqrt{x})}}$, c) $\frac{1}{2\sqrt{\ln(\sqrt{x})}}$, d) $\frac{1}{\sqrt[4]{\ln^3(x)}}$.

$$\left(\ln(x^{\frac{1}{2}})\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\ln x\right)^{\frac{1}{2}}$$

derivata:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln x\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\ln x\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{4x\sqrt{\ln(\sqrt{x})}}$$

7. L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x+3)(x+1)}\,dx$:

a) converge a 0 b) diverge a $+\infty$

c) converge a $\ln(6)$ d) converge a $\ln(\frac{3}{2})$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x+3)(x+1)}\,dx$$

$$\frac{A}{(2x+3)} + \frac{B}{(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(2x+3)}{(2x+3)(x+1)} = \frac{Ax+A+2Bx+3B}{(2x+3)(x+1)} =$$

$$= \frac{x(A+2B)+A+3B}{(2x+3)(x+1)} \quad \begin{cases} A+2B=0 \\ A+3B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} +B=+1 \\ A=-2 \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{-2}{2x+3}+\frac{1}{x+1}\right)dx = -\ln|2x+3| + \ln|x+1| = \ln\left|\frac{x+1}{2x+3}\right|$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left|\frac{\cancel{x}(1+\cancel{\frac{1}{x}})}{\cancel{x}(2+\cancel{\frac{3}{x}}^{\to 0})}\right|\right] = \ln\left|\frac{1}{2}\right| \qquad \lim_{x\to 0}\ln\left|\frac{x+1}{2x+3}\right| = \ln\left|\frac{1}{3}\right|$$

$$\to \ln\left|\frac{1}{2}\right| - \ln\left|\frac{1}{3}\right| = \ln\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right| = \ln\left|\frac{3}{2}\right|$$

8. Per quali valori di a l'integrale improprio $\int_0^1 \frac{\arctan x}{(\sin x)^a}\,dx$ è convergente?

a) $a = 3$, b) $a = 2$, c) $a = 1$, d) per nessun valore di a.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} f(x)}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg} f(x) = f(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} f(x) = f(x)$$

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{(\sin x)^\alpha}\,dx$$

$x \to 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(1)}{\operatorname{sen}(1)^\alpha} = \frac{\pi}{4\cdot \operatorname{sen}(1)^\alpha}$$

$x \to 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(0^+)}{\operatorname{sen}(0^+)^\alpha} = \frac{0}{0} \quad \therefore \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x)}{\operatorname{sen}(x)^\alpha} \approx \frac{x}{x^\alpha}$$

per $x \to 0$ $\quad \operatorname{sen} x \approx x$

$\arctan x \approx x$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}}\,dx \to \text{se questo } \geq 1 \text{ DIVERGE, se } < 1 \text{ CONVERGE}$$

$$\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

converge $\alpha < 1$

diverge $\alpha \geq 1$

$\alpha - 1 < 1$

$\alpha < 2 \to$ risposta: $\alpha = 1$

9. Indicare per quali valori di a e di b la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & x > 1, \\ ax + b & x \le 1, \end{cases}$$

è derivabile in 1:

a) $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{4}$ b) $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{4}$

c) $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{4}$ d) $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{4}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & x > 1 \\ ax+b & x \le 1 \end{cases}$$

è derivabile in 1:

$x = 1$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$ax + b = \frac{1}{2} \,?$$

$$a + b = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{4} \quad b = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \lim_{x\to 1^-} ax + b =$$

$$\frac{1}{2} = a + b$$

vediamo se è continua la derivata:

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)' = \left\{(x+1)^{-1}\right\}' \quad -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad (ax+b)' = a$$

$$-\frac{1}{2^2} = \underbrace{-\frac{1}{4} = a} \qquad \underbrace{b = \frac{1}{2} - a = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}}$$

10. La funzione $f(x) = x^2 \ln x + \frac{x^2}{2}$

a) è concava se $0 < x < e^{-1}$ b) è concava nel suo dominio

c) è convessa se $x > e^{-2}$ d) è convessa nel suo dominio.

$$f(x) = x^2 \ln x + \frac{x^2}{2}$$

$$f'(x) = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}$$

$$= 2x \ln x + \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} + x = 2x \ln x + 2x = 2x(\ln x + 1)$$

$$f''(x) = (2x') \cdot (\ln x + 1) + 2x(\ln x + 1)' = 2\ln x + 2 + \frac{2x}{x} =$$

$$= 2\ln x + 4 = 2(\ln x + 2)$$

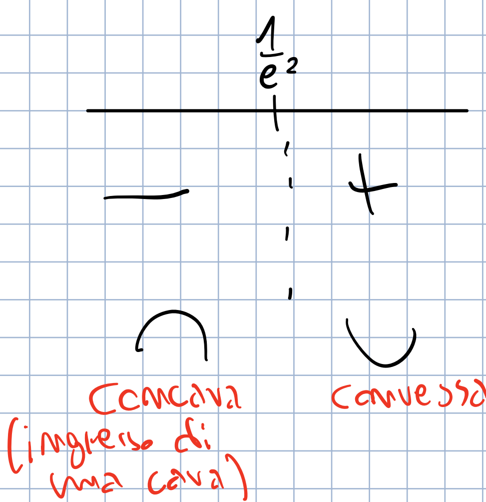
quando è $f''(x) > 0$?

$\ln x + 2 > 0$

$\ln x > -2$

$e^{\ln x} > e^{-2}$

$x > \frac{1}{e^2}$



11. Quale, tra i seguenti, è lo sviluppo di Taylor corretto della funzione $\ln(1+5x)\cdot\ln(1-3x)$ centrato in 0?

a) $-15x^2+15x^3+o(x^4)$,

b) $-15x^2+15x^3+o(x^3)$,

c) $-15x^2+15x^3-\frac{225}{4}x^4+o(x^4)$,

d) $2x-8x^2+o(x^2)$.

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

1°: $5x-\frac{(5x)^2}{2}+\frac{(5x)^3}{3}-\frac{(5x^4)}{4}+o(x^4)$

2°: $-3x-\frac{(-3x)^2}{2}+\frac{(-3x)^3}{3}-\frac{(-3x)^4}{4}+o(x^4)$

$\frac{(5x)^3}{3}\cdot(-3x)$ ✓

$-15x^2+5x\left(-\frac{(-3x)^2}{2}\right)-\frac{(5x)^2}{2}\cdot(-3x)-\frac{(5x)^2}{2}\cdot\left[-\frac{(-3x)^2}{2}\right]+5x\cdot\frac{(-3x)^3}{3}$

$=-15x^2+5x\left(-\frac{9x^2}{2}\right)+\frac{25x^2}{2}\cdot 3x-\frac{25x^2}{2}\cdot\left(-\frac{9x^2}{2}\right)-\frac{(\cancel{27}^{\,9}\cdot 5)x^4}{\cancel{3}}-\frac{(125\cdot\cancel{3})x^4}{\cancel{3}}$

$=-15x^2-\frac{45x^3}{2}+\frac{75x^3}{2}+\frac{225}{4}x^4-45x^4-125x^4$

$=-15x^2+\frac{\cancel{30}^{\,15}x^3}{\cancel{2}}+\frac{225}{4}x^4-170x^4=$

$=$